

Практическое занятие 1

Тема: «Система единиц физических величин. Размерность. Размер»

Цель занятия: Получить навыки в использовании качественных и количественных характеристик объектов измерений.

Задачи: 1) изучить основные и производные физические величины системы SI;

2) освоить применение теории размерности;

3) научиться определять числовые характеристики размеров в узаконенных единицах.

Основные положения

Системой единиц физических величин называется совокупность основных и производственных единиц физических величин, образованная в соответствии с принципами для заданной системы физических величин.

С 1 января 1980 г. в нашей стране действует международная метрическая система единиц SI (System International). В этой системе установлено 7 основных единиц: длины: метр (м); массы: килограмм (кг); времени: секунда (с); силы электрического тока: Ампер (А); термодинамической температуры: Кельвин (К); силы света: кандела (кд); количества вещества: моль (моль).

В SI приняты две дополнительные единицы для измерения углов:

- плоского угла: радиан (рад);
- телесного угла: стерadian (ср).

Производные единицы системы SI образованы в соответствии с уравнениями, связывающими их с основными единицами или с основными и уже определенными производными. В SI установлено более 130 производных единиц.

Например, 1 м/с – единица скорости, образованная из основных единиц SI – метра и секунды;

1 Н – единица силы, образованная из основных единиц SI – килограмма, метра и секунды.

В процессе измерения производят сравнение неизвестного измеряемого размера с известным, за который, как правило, принимают единицу измеряемой величины. В результате определяют сколько единиц измеряемой физической величины содержится в измеряемом размере.

Таким образом, единицей измерения физической величины называется физическая величина фиксированного размера, которой присвоено числовое значение, равное 1, и применяемая для количественного выражения однородных с ней физических величин.

Показателем качественного различия физических величин является их размерность. Размерность обозначается "dim" и записывается заглавными латинскими буквами:

- размерность длины – $\dim l = L$;
- размерность массы – $\dim m = M$;
- размерность времени – $\dim t = T$;
- размерность силы электрического тока – $\dim I = I$;

- размерность термодинамической температуры – $\dim T = \Theta$;
- размерность силы света – $\dim j = J$.

Размерность любой производной физической величины Q можно представить уравнением, содержащим размерности основных физических величин с соответствующими показателями степеней:

$$\dim Q = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \cdot I^{\lambda} \cdot \theta^{\eta} \cdot J^{\xi}, \quad (1.1.)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \xi$ – показатели степеней.

Если все показатели степеней равны нулю, то физическая величина называется безразмерной. Безразмерная величина может быть получена как отношение величин, имеющих одинаковые размерности, либо как логарифм отношения этих величин. В последнем случае безразмерная величина называется логарифмической.

Например, относительная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_0 = \varepsilon / \varepsilon_B \quad (1.2.)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м;

ε_B – диэлектрическая проницаемость вакуума, Ф/м.

Анализ размерности результата при выводе формул или расчетах позволяет проверить их правильность, а также зависимость между величинами.

Если сравнить записи размеров: 1 км, 1000 м, 100000 см, 1000000 мм, то очевидно, что это различные формы представления одного размера. Числовые значения различны из-за различия выбранных единиц измерений.

В SI установлены кратные (большие единиц системы) и дольные (меньшие единиц системы) единицы, отличающиеся от основных в число раз, кратное 10. Для их обозначения используются специальные приставки.

Таблица 1.1 – Кратные и дольные единицы.

Кратные единицы			Дольные единицы		
Множител ь	Приставк а	Обозначени е	Множител ь	Приставк а	Обозначени е
10^{18}	Экса	Э	10^{-1}	Деци	д
10^{15}	Пета	П	10^{-2}	Сант	с
10^{12}	Тера	Т	10^{-3}	Милли	м
10^9	Гига	Г	10^{-6}	Микро	мк
10^6	Мега	М	10^{-9}	Нано	н
10^3	Кило	к	10^{-12}	Пико	п
10^2	Гекто	г	10^{-15}	Фемто	ф
10^1	Дека	да	10^{-18}	Атто	а

Можно выразить единицу производной физической величины через единицы основных физических величин с помощью уравнения:

$$[Q] = k [L]^{\alpha} \cdot [M]^{\beta} \cdot [T]^{\gamma} \cdot [I]^{\lambda} \cdot [\theta]^{\eta} \cdot [J]^{\xi}, \quad (1.3.)$$

где $[L], [M], \dots$ – единицы основных физических величин;

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – показатели степеней;

k – коэффициент пропорциональности.

Если $k = 1$, то такая производная единица называется когерентной. Например, 1м/с^2 – когерентная единица ускорения.

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой система единиц физических величин?
2. Когда введена в действие SI, и какие основные единицы в нее входят?
3. Что такое производная единица? Приведите примеры таких единиц?
4. В чем заключается измерение величины?
5. Что называется единицей измерений физической величины?
6. Для чего введено понятие «размерность»?
7. Как выразить размерность производной физической величины?
8. Какие величины называются безразмерными?
9. Какие кратные и дольные единицы установлены в SI?
10. Что такое когерентная единица?

Примеры решения задач

Задача 1.3.1. Выразите размерность электрической емкости через размерности основных физических величин SI. Определите единицу измерения электрической емкости через единицы основных физических величин. Установлена ли специальная единица электрической емкости?

Решение.

Электрическая емкость C численно равна заряду q , изменяющему потенциал проводника U на 1 единицу:

$$C = q/U \quad (1.4.)$$

В системе SI за единицу заряда q принимается Кулон. Кулоном называется электрический заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за 1с при силе тока I в 1А, т.е.

$$q = I \cdot t \quad (1.5.)$$

Электрическое напряжение U представляет собой работу A , совершаемую суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении на участке цепи единичного положительного заряда q :

$$U = A/q \quad (1.6.)$$

Работу A можно выразить через электрическую силу F и путь l :

$$A = F \cdot l \quad (1.7.)$$

Сила F определяется по закону Ньютона:

$$F = m \cdot a \quad (1.8.)$$

где m – масса;

a – ускорение.

В свою очередь ускорение a :

$$a = v/t = l/t^2 \quad (1.9.)$$

где v – скорость;

l – длина;

t – время.

Тогда можно записать:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{I \cdot t \cdot q}{A} = \frac{I \cdot t \cdot I \cdot t}{F \cdot l} = \frac{I^2 \cdot t^2}{m \cdot a \cdot l} = \frac{I^2 \cdot t^2 \cdot t^2}{m \cdot l \cdot l} = \frac{I^2 \cdot t^4}{m \cdot l^2} \quad (1.10)$$

Размерность электрической емкости:

$$\dim C = \dim^{-2} l \cdot \dim^{-1} m \cdot \dim^4 t \cdot \dim^2 I = L^{-2} \cdot M^{-1} \cdot T^4 \cdot I^2 \quad (1.11.)$$

В системе SI единица электрической емкости может быть выражена:

$$[C] = \frac{C^4 \cdot A^2}{M^2 \cdot K^2} = \Phi \quad (1.12)$$

Специальная единица электрической емкости называется Фарадой.

Задача 1.3.2. Переведите с помощью коэффициентов в единицы SI следующие величины: 1 МПа, 1 кОм, 1 мкм, 1 пФ.

Решение.

В соответствии с коэффициентами и условными обозначениями приставок кратных и дольных единиц таблицы 1.1 можно записать:

1 МПа = $1 \cdot 10^6$ Па; 1 кОм = $1 \cdot 10^3$ Ом; 1 мкм = $1 \cdot 10^{-6}$ м; 1 пФ = $1 \cdot 10^{-12}$ Ф.

Задача 1.3.3. Переведите единицы давления в единицы давления SI. Какие из них являются когерентными?

Решение.

В системе SI давление измеряется в Паскалях: 1 Па = 1 Н/м². Для единиц давления установлена следующая связь с единицей SI:

1 бар = 10^5 Па;

1 мм.рт.ст = 133,322 Па;

1 мм вод.ст = 9,80665 Па;

1 ат = $9,80665 \cdot 10^4$ Па;

1 атм = 760 мм.рт.ст = $1,01325 \cdot 10^5$ Па.

Так как $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 1 \cdot 9,8 \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{м}}$, т.е. коэффициент

пропорциональности $k = 9,8$ – отличен от 1, то ни одна из единиц давления не является когерентной.

Задача 1.3.4. Найдите ошибки в следующих записях размеров:

а) 2,6 кг·с²/м; б) 75±5 мм; в) от -10⁰ С до +20⁰ С; г) 10 кг/с²·м; д) 5 кг·м/с³/К; е) 220В; ж) 110 В, 127 В и 220 В; з) 3 м А; и) 0,8 ммин; к) ускорение 40 метров в секунду в квадрате.

Решение.

а) 2,6 кг·с²/м – правильно: $2,6 \frac{\text{кг}}{\text{см} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}}$ или 2,6 кг·с⁻²·м⁻¹, или 2,6

кг/(с²·м) – при наличии записи в знаменателе должна быть одна горизонтальная или косая черта. Величины, входящие в знаменатель, должны быть заключены в скобки (в случае косой черты) или все иметь показатели степеней (при записи без черты знаменателя);

б) 75±5 мм – правильно: (75±5) мм или 75 мм±5 мм – так как единица измерения относится к обоим числам, то они должны быть

объединены скобками; возможно указание единицы измерения после каждого числа;

в) от -10°C до $+20^{\circ}\text{C}$ - правильно от -10 до $+20^{\circ}\text{C}$ – при указании интервала или при перечислении размеров единица измерения записывается один раз в конце. Единицей измерения в записи является градус Цельсия ($^{\circ}\text{C}$) – записывается без пробелов (пробел после числа);

г) $10\text{ кг/с}^2\cdot\text{м}$ – правильно: $10\text{ кг}/(\text{с}^2\cdot\text{м})$ или $10\text{ кг}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{м}^{-1}$ или $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2\cdot\text{м}}$ (в

соответствии с примером 1.3.4, а);

д) $5\text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^3/\text{К}$ – правильно: $5\text{ м}\cdot\text{кг}/(\text{с}^3\cdot\text{К})$ или $5\text{ м}\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-3}\cdot\text{К}^{-1}$ или $5\frac{\text{м}\cdot\text{кг}}{\text{с}^3\cdot\text{К}}$ (в соответствии с примером 1.3.3, а, г);

е) 220В – правильно: 220 В – перед указанием единицы измерений после числа необходим пробел;

ж) 110 В , 127 В и 220 В – правильно 110 , 127 и 220 В (в соответствии с примером 1.3.4, в);

з) 3 м А – правильно 3 мА – приставки, обозначающие кратность или дольность, пишутся слитно с обозначением единиц измерений;

и) $0,8\text{ ммин}$ – правильно: $0,048^{\text{м}}$ – приставка, обозначающая дольность или кратность, добавляется только к основной единице величины или специальной единице, являющейся наименьшей;

к) ускорение $40\text{ метров в секунду в квадрате}$ – правильно: ускорение $40\text{ метров на секунду в квадрате}$ – предлог «в» используется только для единиц, характеризующих скорость протекания процесса.

Задачи

Задача 1.4.1. Выразите размерности приведенных ниже физических величин через размерности основных физических величин системы SI. Определите единицы измерений этих величин и их связь с единицами измерений основных физических величин системы SI.

Физические величины: сила тока, скорость, ускорение, плотность вещества, теплоемкость, напряжение, электрическое сопротивление, электрическая проводимость, электрическая емкость, индуктивность, сила, давление, работа, мощность, энергия.

Задача 1.4.2. Переведите с помощью коэффициентов в единицы SI следующие величины: 1 кН , 1 Мт , 1 нФ , 1 мА , 1 сН , 1 мкГн , 1 ТГц , 1 гПа , 1 даВт .

Задача 1.4.3. В каком соотношении должны были бы находиться миллиметр и микрокилометр, если бы приставки давались километру?

Задача 1.4.4. Как следовало бы называть такие единицы как литр и тонна по логике названий метрической системы мер?

Задача 1.4.5. Русский изобретатель Б.С.Якоби (1801-1874 г.г.) предложил общую для всех единиц сопротивления проводников электрическому току и определил ее как сопротивление медной проволоки

длиной 6,358 фута (1 фут = 30,48 см) и диаметром 0,00336 дюйма (1 дюйм = 2,54 см). Выразите единицу сопротивления Якоби в системе SI, если удельное сопротивление меди $\rho_{Cu} = 0,0175 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$.

Задача 1.4.6. Каким должно быть показание спидометра, градуированного в км/ч при скорости автомобиля 30,2 м/с?

Задача 1.4.7. При испытании автомобиля установлена мощность его двигателя в рабочем режиме, равная 58,84 кВт. Выразите мощность двигателя в лошадиных силах, учитывая, что 1 л.с. = 735,499 Вт.

Задача 1.4.8. Угловая скорость вала редуктора станка 60 рад/с. Найдите частоту вращения вала в оборотах в минуту.

Задача 1.4.9. Массовый расход нефти, измеренный поплавковым расходомером, составил 12 кг/с. Выразите массовый расход нефти в тоннах в часах.

Задача 1.4.10. На предприятии израсходовано 8,55 ГДж электрической энергии. Выразите расход электрической энергии в киловатт-часах.

Задача 1.4.11. Определите необходимую массу песка для засыпки дорожек, общая длина которых 0,5 км, ширина 2 м. При этом слой песка должен иметь толщину 2,5 см. Плотность песка $1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Задача 1.4.12. Манометр парового котла показывает давление 8 технических атмосфер. С какой силой давит пар внутри котла на поверхность стенки в 1 м^2 ?

Задача 1.4.13. Определите работу, совершаемую газами в цилиндре двигателя за один ход поршня, равный 18 см, если площадь поршня $12 \cdot 10^3 \text{ мм}^2$, а среднее давление газов на поршень 5 ат.

Задача 1.4.14. Какую работу совершает двигатель мощностью 2,5 л.с. за 10 мин?

Задача 1.4.15. Транспортер должен поднимать в час 50 м^3 песка на высоту 500 см. Определите необходимую для этого мощность двигателя в кВт.

Задача 1.4.16. Двигатель токарного станка при скорости резания 780 м/мин развивает мощность 6 л.с. Определите силу сопротивления материала заготовки.

Задача 1.4.17. Диаметр шкива электродвигателя, делающего 1200 оборотов в минуту, равен 20 см. На сколько миллиметров нужно изменить диаметр шкива, чтобы при увеличении угловой скорости электродвигателя до 84 рад/с скорость движения приводного ремня осталась прежней?

Задача 1.4.18. Окружность одного из двух шкивов, связанных ременной передачей, равная 800 мм, а другого 180 см. Определите угловую скорость в единицах SI второго шкива, если первый делает 70 оборотов в минуту.

Задача 1.4.19. Определите, сколько метров проволоки, сопротивление 1 дм которой равно 3 кОм, нужно взять, чтобы при включении её в цепь с напряжением 220 В величина тока в цепи не превышала 95 мкА.

Задача 1.4.20. Для покрытия цинком партии болтов и гаек их погрузили в раствор цинковой соли. Процесс гальванизации длился 20 мин при напряжении 3 В. При этом работа тока была равна 540 кДж. Какой величины ток потребляла гальваническая ванна? Сколько цинка выделилось на деталях, если при токе 1 А выделяется в 1 секунду 0,339 мг цинка?

Задача 1.4.21. Мощность электродвигателя заточного станка 1,5 л.с., напряжение тока 220 В. Определите величину тока.

Задача 1.4.22. Электрический нагреватель должен потреблять мощность не более 0,90 кВт при напряжении 220 В. Обмотка нагревателя делается из нихильевой проволоки ($\rho_{Ni} = 0,45 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$) сечением 0,5 мм². Рассчитайте длину обмотки в метрах.

Задача 1.4.23. Средняя величина тока, потребляемая электрической сетью города для освещения квартир, 3000 А. Определите израсходованную за сутки энергию (в кВт·ч, Н·м, ккал) и среднюю суточную мощность (в кВт и л.с.), если напряжение, подаваемое в квартиры – 220 В.

Задача 1.4.24. Кипятильник нагревает 1,7 л воды от 25 °С до кипения за 5 минут. Определите величину тока в кипятильнике при напряжении в цепи 220 В. Потерями теплоты можно пренебречь.

Задача 1.4.25. Электросварочный аппарат в момент сварки даёт ток 7,5 кА при напряжении 3 В. Свариваемые стальные листы имеют сопротивление 0,5 мОм. Какое количество теплоты, выраженное в джоулях, выделится при сварке за 4 минуты?

Задача 1.4.26. Предел прочности клеевого шва для стали, склеенной клеем БФ, при растяжении равен 70 Н/мм². Какой наибольший груз можно повесить к склеенному стальному вертикальному стержню, если диаметр стержня 2 см?

Задача 1.4.28. Допустимо ли насадить точильный круг на вал двигателя, делающего 2850 об/мин, если на круге имеется штамп завода изготовителя: 35 м/с; Ø250 мм?

Задача 1.4.29. Академик Б.С. Якоби в 1834 г. изобрёл электродвигатель. В первом варианте электродвигатель равномерно поднимал груз 5,0 кг на высоту 60 см за 2 секунды. Определите мощность двигателя в единице SI.

Задача 1.4.30. Какова производительность (в л/ч) установки водоснабжения на животноводческой ферме, если при напоре воды 10 м мощность насоса составляет 0,7 кВт?

Задача 1.4.31. Нефть из скважины поднимается по трубе диаметром 60 мм. С какой скоростью движется нефть (м/с), если в 1 ч через трубу проходит 9,12 т нефти?

Задача 1.4.32. Определите высоту подъёма грунтовой воды в напорном источнике относительно поверхности земли, если вода залегает на глубине 30 м и находится под давлением 5 ат. Атмосферное давление учесть, а сопротивлением при движении воды по трубопроводу пренебречь.

Задача 1.4.33. Фреза станка вращается с угловой скоростью

3768 рад/мин. Число зубьев на фрезе 40. С какой частотой вибрирует станок?

Задача 1.4.34. Стальную деталь (рисунок 1.1) проверяют ультразвуковым дефектоскопом, работающим на частоте 1 МГц. Первый отражённый сигнал был получен через 8 мкс после послылки, а второй – через 20 мкс. На какой глубине обнаружен дефект? Какова высота детали? Скорость ультразвука в стали 500 м/с.

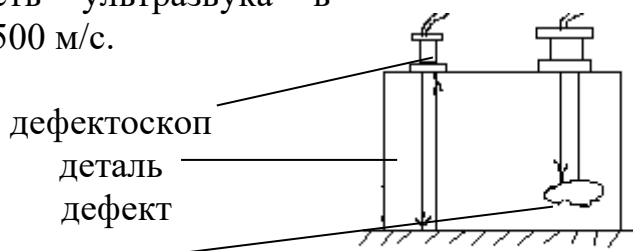


Рисунок 1.1 – Схема измерений

ультразвуковым дефектоскопом

Задача 1.4.35. Ультразвук применяется для измерения скорости потоков жидкости и газа. Какова скорость v потока, если расстояние между двумя вибраторами 0,1 км ультразвук проходит в одном направлении за 0,5 с, в противоположном – за 1 с? Зависит ли результат измерений от температуры и рода жидкости?

Задача 1.4.36. Определите к.п.д. тракторного двигателя, если расход дизельного топлива составляет 216 г на 1 л.с. в 1 час?

Задача 1.4.37. Мощность двигателя автомобиля 80 кВт. Определить расход бензина в 1 час, если к.п.д. двигателя 0,25.

Задача 1.4.38. В компрессоре при движении поршня вниз в цилиндр засасывается 500 мл воздуха при температуре -3°C и давлении 0,981 бар. При движении поршня вверх воздух нагнетается в ресивер (специальный баллон). Сколько качаний сделано, если температура воздуха в ресивере 27°C , а давление 5 ат? Ёмкость ресивера 22 л.

Задача 1.4.39. Определите, в каком агрегатном состоянии находится вода при 40°C и давлении 14,5 атм? При 643 К и давлении 250 ат? При 320°R и давлении 220,7 бар? При 626°F и давлении $245 \cdot 10^5$ Па?

Задача 1.4.40. На сколько градусов нужно было бы нагреть медную проволоку сечением 1 мм^2 , чтобы она приняла ту же длину, что и под действием растягивающей нагрузки в 5 кГ?

Задача 1.4.50. Давление воздуха в отбойном молотке 4 ат, площадь поршня 15 см^2 , ход поршня 30 мм. Определите мощность молотка (Вт), если он делает 1200 ударов в минуту.

Задача 1.4.51. Чему равен ход поршня паровой машины, если среднее давление пара 9,8 бар, площадь поршня 200 см^2 и мощность машины при 180 об/мин равна 80 л.с?

Задача 1.4.52. В цепь переменного тока включён конденсатор ёмкостью 1 мкФ и дроссель индуктивностью 0,1 Гн. Найдите отношение индуктивного сопротивления к ёмкостному при частотах 50 Гц и 2 кГц. При какой частоте эти сопротивления станут равными?

Задача 1.4.53. Ёмкость конденсатора 0,05 мкФ. Какой должна быть индуктивность катушки, чтобы реактивные сопротивления катушки и конденсатора при частоте тока 1 кГц были одинаковыми?

Задача 1.4.54. Цепь состоит из последовательно соединённых катушки индуктивностью 16 мГн и конденсатора ёмкостью 2,5 мкФ. Какой должна быть частота тока в цепи, чтобы возникало явление резонанса?

Задача 1.4.55. Цепь состоит из конденсатора ёмкостью 600 пФ. Какую нужно подобрать индуктивность катушки, чтобы резонанс напряжений наступил при частоте тока 1 МГц?

Задача 1.4.56. Найдите реактивное и полное сопротивление цепи, состоящей из последовательно соединённых конденсатора $C=50 \text{ мкФ}$, катушки индуктивности $L=20 \text{ мГн}$ и активного сопротивления $R=30 \text{ Ом}$, при частоте переменного тока $\omega=1 \text{ кГц}$.

Задача 1.4.57. Для работы животноводческой фермы, находящейся на расстоянии 200 м от электростанции, необходима энергия: для освещения –

2,1 кВт, для силовых процессов – 10 л.с и тепловых процессов – 3612 ккал/ч. Рассчитайте сечение алюминиевых проводов передачи энергии, если напряжение в начале линии 230 В, а падение напряжения в линии составляет 8,7 %.

Задача 1.4.58. На искусственных спутниках Земли устанавливают солнечные полупроводниковые электробатареи. Определите среднюю величину электрической энергии, получаемой с 1 м^2 такой батареи в течение 1 оборота спутника вокруг Земли. Плотность потока солнечной энергии 1 кВт/м^2 тепловое излучение составляет 60% потока, к.п.д. батареи 10%, период обращения спутника 102 мин. Спутник освещается лучами солнца $2/3$ времени оборота вокруг Земли.

Задача 1.4.59. Как выражаются через основные единицы системы SI следующие производные единицы, имеющие специальные наименования: Гц, Н, Па, Дж, Вт, Кл, В, Ф, Ом, См, Вб, Тл, Гн, лм, лк, Бк, Гр, Зв?

Практическое занятие 2

Тема: «Представление результатов измерений по различным измерительным шкалам»

Цель занятия: Получить навыки в выражении результатов измерений по различным измерительным шкалам.

Задачи: 1) научиться определять вид измерительной шкалы;
2) изучить свойства различных измерительных шкал;
3) научиться использовать различные измерительные шкалы для выражения результатов измерений и контроля.

Основные положения

При определении количественной характеристики измеряемой величины измеряемый размер сравнивают с известным размером. Это сравнение может быть выполнено по различным измерительным шкалам. Установлены измерительные шкалы порядка, интервалов и отношений.

Шкала порядка (шкала рангов) представляет упорядоченный (ранжированный) ряд размеров, в котором каждый последующий размер больше предыдущего. При этом сами размеры неизвестны. По этим шкалам можно оценивать только эквивалентность. Т.е. результат измерений может иметь вид: измеряемый размер Q_i больше, меньше или равен размеру Q_j по шкале порядка:

$$Q_i > Q_j \text{ или } Q_i < Q_j \text{ или } Q_i = Q_j \text{ или } Q_i \approx Q_j \quad (2.1)$$

При сравнении размеров более одного раза результат измерений можно выразить в виде:

$$Q_j \leq Q_i \leq Q_{j+1} \text{ или } Q_j < Q_i < Q_{j+1}, \quad (2.2)$$

то есть можно определить, между какими соседними размерами Q_j и Q_{j+1} по шкале порядка находится измеряемый размер Q_i .

Условная шкала порядка имеет характерные (реперные) точки, которым присвоены числовые значения в условных единицах или баллах.

На шкале наименований характерным точкам шкалы присвоены названия.

Ни одна из шкал порядка не даёт информацию о значении измеряемой величины, поэтому на этих шкалах не определены никакие математические действия. Возможны только логические операции с использованием свойств транзитивности.

Шкала интервалов (шкала разностей) представляет собой упорядоченную последовательность размеров, между которыми установлены строго определённые интервалы. Сами размеры неизвестны. При измерении размера Q_i можно определить: на сколько размер Q_i отличается от размера Q_j по шкале интервалов:

$$Q_i - Q_j = \Delta Q \quad (2.3)$$

Нуль на шкале условный, поэтому возможны отрицательные значения размеров.

На шкалах интервалов возможны сложение и вычитание, т.е. применяются свойства аддитивности, а также транзитивности.

Шкалы отношений, также как и шкалы интервалов, разбиты на строго определённые одинаковые интервалы. Нуль на шкале отношений является абсолютным, то есть меньше нуля значений не может быть и, следовательно, невозможны отрицательные значения размеров.

Благодаря возможности определять по шкале отношений абсолютные величины размеров, на шкале отношений возможны все логические и математические действия. Можно установить: во сколько раз измеряемый размер Q_i отличается от известного размера Q_j по шкале отношений:

$$Q_i / Q_j = q \quad (2.4)$$

Обычно за известный размер принимают единицу измерений величины: $Q_j = [Q]$ и определяют, во сколько раз измеряемый размер Q_i отличается от соответствующей единицы измерений:

$$q = Q_i / [Q] \quad (2.5)$$

Вопросы для самопроверки

1. Что представляет собой шкала: а) порядка; б) условная порядка (реперная); в) наименований; г) интервалов; д) отношений?
2. Приведите форму выражения результата измерений по шкале: а) порядка; б) интервалов; в) отношений.
3. Какие логические или математические действия возможны на шкале: а) порядка; б) интервалов; в) отношений?
4. В чем состоит отличие шкалы отношений от шкалы интервалов?
5. Почему на шкале интервалов могут быть отрицательные значения размеров?
6. По какой измерительной шкале можно определить абсолютное значение размера?
7. Можно ли вносить мультипликативные поправки в размеры, полученные по шкале интервалов?

Примеры решения задач

Задача 2.3.1. Определите, по каким измерительным шкалам установлены величины следующих показателей:

а) размеры одежды:

по журналу «Бурда моден»	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52
по объёму груди, см	80	84	88	92	96	100	104	108	116	122

Решение.

Шкала размеров одежды по журналу «Бурда моден» представляет собой ранжированный ряд размеров. Размеры приведены в условных единицах. Следовательно, данная шкала является условной шкалой порядка. Интервалы между размерами различны, например, между размерами 42 и 44 – интервал 4 см. а между размерами 48 и 50 – 6 см, что делает невозможным отнести эту шкалу к шкале интервалов.

Шкала размеров, выраженных через объём груди, см, является шкалой отношений, так как имеет чётко определённый интервал, соответствующий 1 см, и абсолютный нулевой размер.

б) температура среды, выраженная в градусах Цельсия и в градусах Кельвина.

Решение.

На международной температурной шкале Цельсия за 0 °С принята температура таяния льда, за 100 °С – температура кипения воды. Этот, интервал разбит на 100 интервалов, каждый из которых соответствует 1 °С. Возможны отрицательные значения температуры, так как в природе может быть температура, меньшая температуры таяния льда. Следовательно, шкала Цельсия является шкалой интервалов.

1 К равен 1 °С, так как соответствует 0,01 температурного интервала между точками таяния льда и кипения воды. За 0 К принята температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. В природе ниже температуры не может быть:

$$0 \text{ К} = -273,15 \text{ °С}$$

Эта температура является абсолютным нулём. На шкале Кельвина нет отрицательных значений. Следовательно, шкала Кельвина является шкалой отношений.

Задачи

Задача 2.4.1. Определите, по каким измерительным шкалам установлены величины следующих показателей:

а) фотовыдержка

Сумма условных чисел	23	24	26	28	29	30	31	32	33	34	35	37	39	42	44	...
Доли секунды	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	...

б) чувствительность фотоплёнки:

единицы ГОСТ ASA:16;20;25;32;40;50;65;80;100;130;160;200;250;320;500

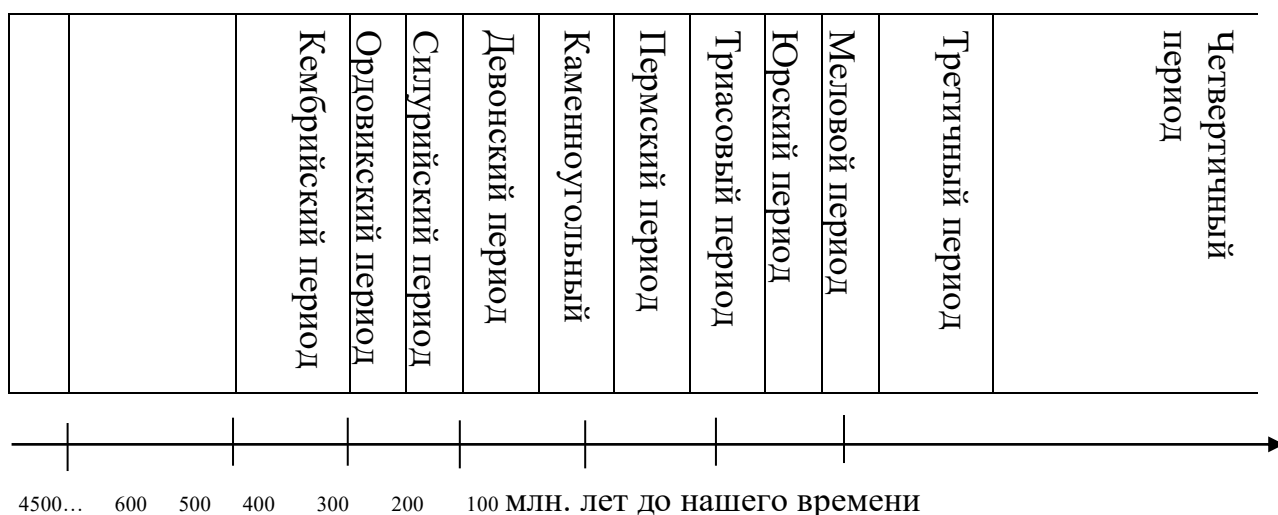
градусы DIN:13;14;15;16;17;18;19;21;22;23;24;25;26;28

условные единицы: 100; 200; 400; 800; 1600

в) календари;

г) археологические этапы развития Земли:

Возникн	Докем-брийская эра	Палеозойская эра «древней жизни»	Мезозойская эра «средней жизни »	Кайнозойская эра «современной жизни»
---------	--------------------	----------------------------------	----------------------------------	--------------------------------------



д) кислотность почв:

Наименование	Кислотность, pH
сильнокислые	3 – 4
кислые	4 – 5
слабокислые	5 – 6
нейтральные	6 – 7
щелочные	7 – 8
сильнощелочные	8 – 9

е) баллы в спорте, например, при выездке лошадей:

- 10 – отлично;
- 9 – очень хорошо;
- 8 – хорошо;
- 7 – довольно хорошо;
- 6 – вполне удовлетворительно;
- 5 – удовлетворительно;
- 4 – неудовлетворительно;
- 3 – довольно плохо;
- 2 – плохо;
- 1 – очень плохо;
- 0 – не выполнено;

ж) пробы драгоценных металлов:

золото: 375; 500; 583; 750; 958;

серебро: 800; 875; 916; 960.

Пробы определяются как число частей металла в 1000 частях (массовая доля) лигатурного сплава;

з) звуковая октава (формула музыкального строя, выведенная

Пифагором):

Доли звучащей струны	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12	1/13	1/15	1/16
Число колебаний каждой доли при частоте струны 24 Гц	192	216	240	256	288	320	360	384

Ноты	до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до
------	----	----	----	----	------	----	----	----

Задача 2.4.2. В первом ртутном термометре, созданном в 1715 г. Фаренгейтом, в качестве реперных точек были выбраны температура таяния смеси льда с солью и нашатырем ($-32\text{ }^{\circ}\text{C}$) и температура тела человека. Позднее Реомюр предложил шкалу, в которой градус представлял $1/80$ часть температурного интервала между точкой таяния льда ($0\text{ }^{\circ}\text{R}$) и точкой кипения воды ($80\text{ }^{\circ}\text{R}$) при атмосферном давлении. Эта же точка на шкале Фаренгейта соответствовала $212\text{ }^{\circ}\text{F}$. Зная температуру в градусах Цельсия, переведите значение в температуру по шкалам Фаренгейта и Реомюра. Определите вид каждой из шкал.

Задача 2.4.3. Какие температурные точки совпадают на шкалах:

- а) Цельсия и Фаренгейта;
- б) Реомюра и Фаренгейта.

Задача 2.4.4. По каким шкалам измерялась длина удава в мультфильме «38 попугаев», если она была равна: двум половинкам удава, двум слоненкам, пяти мартышкам, 38 попугаям и 1 попугайскому крылышку? В чем отличие этих шкал?

Задача 2.4.5. Подгоняет или тормозит южное течение движение корабля, идущего курсом «норд»? По какой шкале определяется курс в морской навигации?

Задача 2.4.6. Выразите по шкале отношений шкалу порядка следования цветов в спектре белого цвета.

Задача 2.4.7. Определите погрешность измерения времени в годах при использовании григорианского календаря. Какие меры принимаются для уменьшения этой погрешности?

Задача 2.4.8. Как определить стороны света ночью, пользуясь часами и ориентируясь на Луну?

Задача 2.4.9. Как приближенно можно по пению лесных птиц определить время в летние ночные и утренние часы?

Задача 2.4.10. Определите, какому году в нашем летоисчислении соответствует дата 19 декабря 7208 г., упомянутая в летописи.

Задача 2.4.11. Какую физическую величину, и по какой шкале характеризуют надписи на метрономе: престо, виваце, аллегро, модерато?

Задача 2.4.12. Приведите примеры использования различных видов измерительных шкал в бытовых приборах: кухонной печи, утюге, холодильнике, телевизоре, музыкальном центре, медицинском термометре.

Задача 2.4.13. К каким измерительным шкалам можно отнести последовательности:

- а) знаков небесных тел: Солнца, Луны, Марса, Меркурия, Юпитера, Венеры, Сатурна;
- б) знаков зодиака: Водолея, Рыб, Овна, Тельца, Близнецов, Рака, Льва, Девы, Весов, Скорпиона, Стрельца, Козерога?

Задача 2.4.14. Мановакуумметр градуирован в килопаскалях, как показано на рисунке. Оцифруйте шкалу прибора в других единицах измерения давления: атм., кгс/см², мм рт. ст., бар. По какой измерительной шкале определяется давление мановакуумметром (рисунок 2.1)?

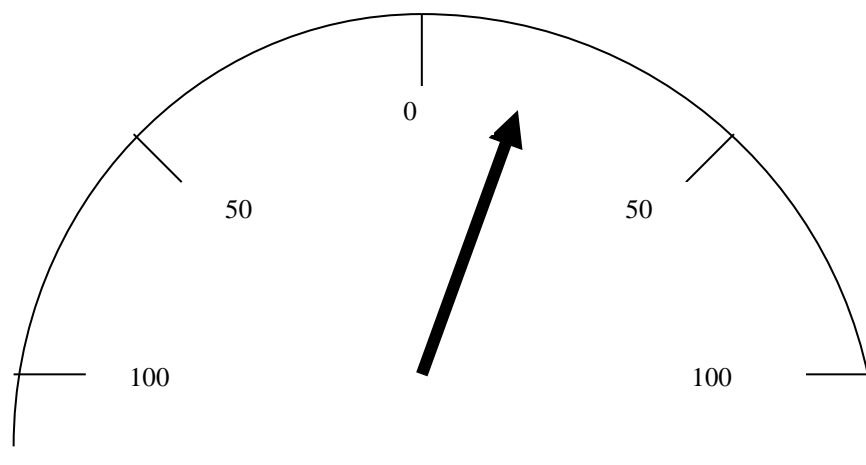


Рисунок 2.1 – Шкала мановакуумметра

Задача 2.4.15. Песочные часы с узким горлышком, через которые сыплется мелкий песок из верхней части в нижнюю, называются склянкой. Склянке на корабле соответствует получасовой промежуток времени. Счет начинается с полудня: в 12.00 бьют 3 удара в судовой колокол, в 12.30 – 1 удар, в 13.00 – 2, в 13.30 – 3, в 14.00 – 4, ..., в 15.00 – 6, в 16.00 – 8; в 16.30 – 1 раз и следует новый отчет времени на 4 часа и т. д.

Определите вид измерительной шкалы. Сколько склянок должны пробить в 8.30 час., в 10.00 час., в 24.00 час., в 3.30 час.?

Задача 2.4.16. Оценить расстояние до недоступных предметов можно, используя зрение и слух. При нормальном зрении человек различает в дневное время: трубы на крышах на расстоянии в 3 км, отдельные деревья – 2 км, людей (в виде отдельных точек) – 1,5-2 км, переплеты оконных рам – 500 м, листья на деревьях – 200 м, кисти рук – 100 м, глаза (в виде точек) – 60-70 м; в ночное время: костер виден на расстоянии 6-8 км, свет карманного фонарика –

2 км, горящая спичка – 1-1,5 км, огонь сигареты – 500 м.

При нормальной влажности воздуха в тишине средняя дальность начала слышимости: шума электрички – 5-10 км, гудка автомобиля – 2-3 км, лая собаки – 1-2 км, движения автомашины по шоссе – 1-2 км, по грунтовой дороге – 0,5-1 км, стук топора – 300-500 м, разговор людей (неразборчиво) – 200 м, кашель – 50-100 м.

Определите виды этих шкал.

Задача 2.4.17. Как можно оценить твердость минерала, если:

- а) минерал процарапывается углем;
- б) минерал процарапывается корундом, но не повреждается топазом?

Задача 2.4.18. при дегустации пищевых продуктов каждый эксперт оценивал качество по 10-ти бальной системе. По какой шкале проводились измерения?

Задача 2.4.19. При оценке конкурса музыкантов преимущество i -го над j -ым обозначалось 1, j -того над i -ым - -1; равноценное выступление – 0. По какой шкале проводилась оценка и как подвести итоги конкурса? Оценка выступлений приведена в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Оценка творческого конкурса

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	-	-	1	-	1	-	1	1
2	-	0	1	1	-	1	1	0	1	0
3	1	1	0	-	-	-	0	1	1	-
4	1	-	1	0	1	1	1	-	0	0
5	-	1	1	-	0	0	1	1	1	1
6	1	-	1	-	0	0	1	1	1	0
7	-	-	0	-	-	-	0	1	1	1
8	1	0	-	1	-	-	-	0	0	0
9	-	-	-	0	-	-	-	0	0	1
10	1	0	1	0	-	0	-	0	-	0

Задача 2.4.20. При измерении разности температуры в климатической камере и температуры тройной точки воды тремя термометрами с различными классами точности их показания совпали. Графически изобразите этот случай.

Задача 2.4.21. При определении времени наработки до первого отказа изделия пользовались таймером. По какой измерительной шкале получали результаты испытаний?

Задача 2.4.22. При испытаниях двух типов полиэтиленовых мешков на прочность мешки наполняли и бросали до их разрыва. Затем подсчитывали число падений (таблица 2.2). Может ли такой показатель определять прочность? Какая измерительная шкала при этом используется? Вычислите статистические характеристики, необходимые для оценки прочности.

Таблица 2.2 – Результаты испытаний мешков – число падений до разрыва

№ мешка												0 1 2 3 4 5					
Тип мешка	А																
		0	4	8	0	6	0	9	4	2	8	7	1	6	5	9	
В		0	8	4	0	6	8	2	5	4	6						

Задача 2.4.23. Одним из показателей принадлежности произведения конкретному автору является распределение фраз по длине. По какой измерительной шкале определяется этот показатель? Рассчитайте по данным таблицы 2.3 числовые характеристики – асимметрию и эксцесс для проверки соответствия распределения фраз нормальному теоретическому закону.

Таблица 2.3 – Распределение фраз

Число слов	Число фраз	Число слов	Число фраз	Число слов	Число фраз	Число слов	Число фраз	Число слов	Число фраз	Сумма
-5	-9	0-13	4-17	8-21	2-25	6-29	ше	30		
Число предположений	4	6	5	80	94	20	10			132

Задача 2.4.24. Известно, что сахар слаще глюкозы, но глюкоза как составная часть джема обладает дополнительными положительными свойствами. Для оценки ее вкусовых свойств в джеме были взяты от трех производителей образцы земляничного и малинового джемов, изготовленных обычным способом и с заменой 1/4 части сахара на глюкозу. Определите, по какой измерительной шкале проведена оценка. Используя данные таблицы 2.4, ответьте на следующие вопросы:

1. Оказывает ли влияние замена части сахара глюкозой на: а) вкус джемов; б) заключение дегустаторов?
2. Одинаков ли эффект введения глюкозы в земляничный и малиновый джемы?
3. Согласуются ли эффекты на продукции разных предпринимателей?
4. Становится ли слаще джем при замене сахара глюкозой?

Таблица 2.4 – Результаты заключений дегустаторов

Производитель	Предпочитаемый состав	Земляничный			Малиновый		
		Обычный	Глюкоза	Сладкий	Обычный	Глюкоза	Сладкий
А	Обычный	2	1	1	Обычный	1	1
	Глюкоза	1	0	1	Глюкоза	7	8
	Сладкий	7	6	1	Сладкий	1	1

Задача 2.4.28. Измерены отклонения от номинального размера в двух выборках деталей (таблица 2.7). Определите вид измерительной шкалы, рассчитайте средние отклонения в каждой выборке и характеристику их разброса.

Таблица 2.7 – Результаты измерений отклонений в выборках, мкм

Выборка 1	72	50	1		35	6	1	17	20		20	25		0	4	6
Выборка 2	10	6	2	18	22	30					40	12		1	6	24

Подсчитайте число бракованных изделий в каждой выборке, если предельно допустимые размеры деталей 20,47; 20,52 мм, номинальный размер 20,5 мм.

Задача 2.4.29. При проведении поверки вольтметра методом непосредственного сличения получены результаты, приведенные в таблице 2.8. Определите вид измерительной шкалы для оценки погрешности средства измерений. Вычислите абсолютную погрешность в каждой поверяемой отметке шкалы и вариацию показаний.

Таблица 2.8 – Результаты поверки вольтметра

Значение																
поверяемой	(
отметки шкалы,																
В																
П оказан	пр															
ия	ямой															
вольтм	ход															
етра, В	об															
	ратны															
	й ход															

Задача 2.4.30. Оцените среднее время реакции трех групп пациентов на сделанную инъекцию (таблица 2.9). Определите вид измерительной шкалы.

Таблица 2.9 – Время реакции, мин.

Группа 1	1	8	1	1	9	1	8	9	1	1	1
па 1	0,2	,6	1,1	0,0	,8	2,0	,4	,2	0,5	4,0	0,4
Группа 2	6	8	1	1	1	9	1	9	1	1	-
па 2	,8	,8	0,6	2,8	4,2	,5	0,1	,9	1,6	0,8	
Группа 3	7	9	1	1	1	1	1	1	-	-	-
па 3	,2	,0	0,3	4,4	2,4	0,7	0,2	1,4			

Практическое занятие 3

Тема: «Характеристики результатов измерений»

Цель занятия: Получить навыки в определении количественных характеристик результатов измерений.

Задачи: 1) изучить способы выражения характеристик результатов измерений;

2) научиться определять вероятностные, числовые и интервальные характеристики размеров;

3) освоить применение характеристик для анализа экспериментальных данных.

Основные положения

Вероятностно-статистические характеристики

Результаты измерений неизбежно содержат случайные погрешности, действие которых непредсказуемо. Поэтому результаты измерений рассматриваются как случайные величины с применением теории вероятностей.

Случайной величиной называют величину, которая в результате опыта принимает значение? заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. При проведении измерений внимание уделяется закономерностям случайных явлений, которые обладают относительной устойчивостью в их массовом проявлении. Случайное событие называется массовым, если может появиться в результате испытаний, которые могут быть повторены любое число раз при одних и тех же условиях. Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными (аналоговыми). Возможные значения дискретных случайных величин отделимы друг от друга и поддаются счету. Возможные значения непрерывных случайных величин неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал значений. Даже в любом конечном интервале непрерывная случайная величина имеет бесконечное множество значений.

Массовое случайное событие – результат многократных измерений – может быть охарактеризовано абсолютной частотой, относительной частотой, распределением вероятностей и функцией распределения вероятностей.

Абсолютная частота m_i – число появлений одного и того же события (значения результата измерений).

Относительная частота $\frac{m_i}{n}$ – доля конкретного события (конкретного

значения результата измерений) в общем числе событий (далее – результатов измерений). Относительная частота является показателем вероятности P_i дискретного результата измерений:

$$P_i = \frac{m_i}{n} \quad (3.1)$$

Распределение вероятностей представлено на рисунке 3.1.

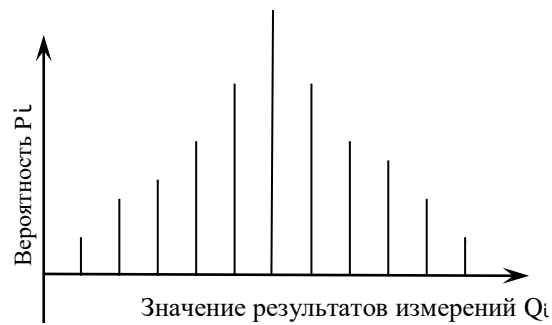


Рисунок 3.1 – Дискретное распределение вероятностей

Функция распределения вероятностей $F(Q)$ является функцией накопленных относительных частот:

$$F(Q) = \sum_{Q_i \leq Q} P(Q_i) \quad (3.2)$$

Дискретная функция распределения вероятности представлена на рисунке 3.2.

Результат измерений при непрерывном отсчете описывается плотностью вероятности $p(Q_i)$ текущего значения Q (рисунок 3.3, а) и функцией распределения вероятностей $F(Q)$ (рисунок 3.3, б):

$$F(Q) = \int_{-\infty}^{Q_0} p(Q) dQ \quad (3.3)$$

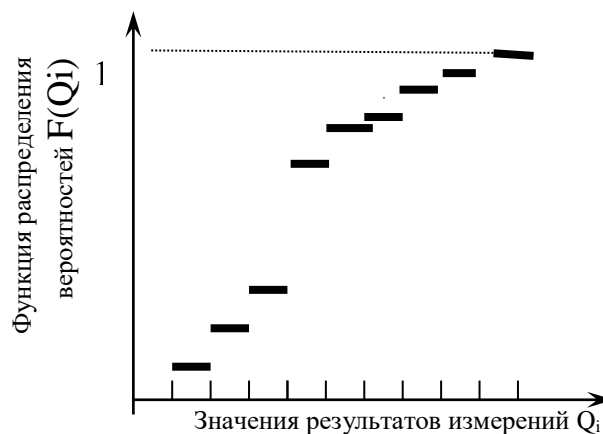


Рисунок 3.2 – Дискретная функция распределения вероятностей $F(Q_i)$

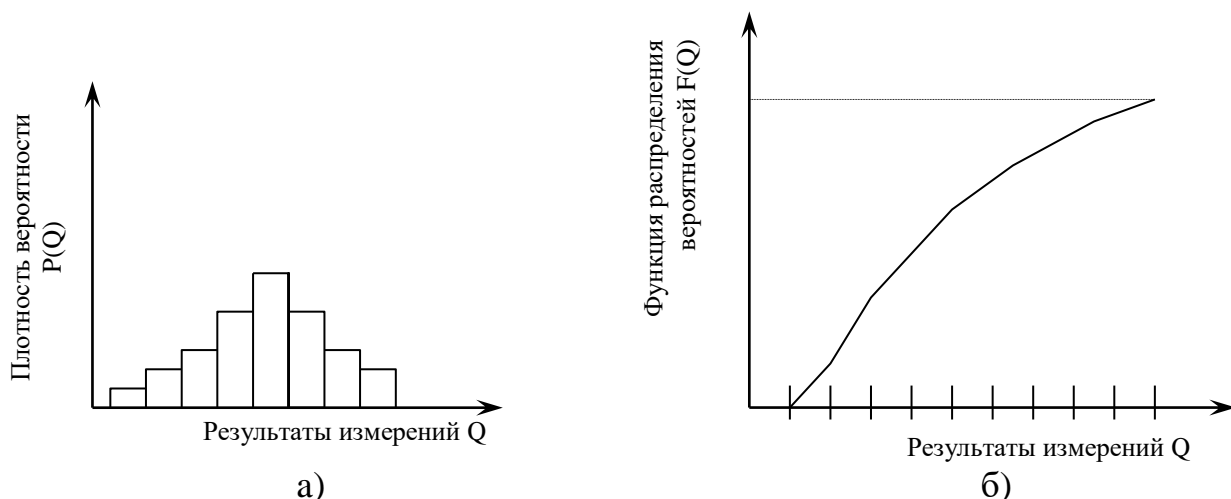


Рисунок 3.3 – Эмпирические плотность вероятностей (а), функция распределения вероятностей (б)

Функция распределения вероятностей определяет вероятность того, что отдельный результат измерения Q при однократном измерении примет значение меньшее её аргумента. Чем больше результат измерения Q , тем больше вероятность того, что ни один результат измерений не превысит этого значения, т.е. $F(Q)$ – неубывающая функция.

$F(Q_2) \geq F(Q_1)$, если $Q_2 > Q_1$. При изменении Q от $-\infty$ до $+\infty$ $F(Q)$ изменяется от 0 до 1.

Результат измерений Q меньше некоторого Q_1 с вероятностью $F(Q_1)$ и меньше Q_2 с вероятностью $F(Q_2)$. Причем $Q_2 > Q_1$. Тогда вероятность того, что результат измерений окажется в интервале значений от Q_1 до Q_2 :

$$P\left\{ Q_1 \leq Q \leq Q_2 \right\} = F(Q_2) - F(Q_1) \quad (3.4)$$

или

$$P\left\{ Q_1 \leq Q \leq Q_2 \right\} = \int_{-\infty}^{Q_1} p(Q) dQ - \int_{-\infty}^{Q_2} p(Q) dQ = \int_{Q_1}^{Q_2} p(Q) dQ \quad (3.5)$$

При расширении интервала интегрирования до бесконечности рассматриваемое событие становится достоверным, поэтому площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности вероятности для любого закона распределения и осью абсцисс, равна 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(Q) dQ = 1 \quad (3.6)$$

Числовые (точечные) характеристики

Вероятностные характеристики результатов измерений являются наиболее полными, но не всегда удобны, а также не всегда достижимы, т.к. для их получения необходимо большое число экспериментальных данных. Поэтому чаще используют числовые характеристики через начальные и центральные моменты.

Начальные моменты получают усреднением значений относительно начала координат по правилу:

$$\overline{X}^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p(x) dx, \quad (3.7)$$

где r – номер (порядок) момента;

x – случайная величина (результат измерений).

Первый начальный момент характеризует математическое ожидание отсчета при бесконечном повторении процедуры сравнения (измерения):

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx \quad (3.8)$$

Для дискретных результатов измерений:

$$M(x) \approx \overline{X} = \sum_{i=1}^n x_i P_i \quad (3.9)$$

где \overline{X} – среднее арифметическое значение;

x_i – i -й результат измерений;

P_i – вероятность появления i -го результата;

n – число результатов измерений;

$$P_i = \frac{m_i}{n} \quad (3.10)$$

где m_i – абсолютная частота i -го результата.

Тогда

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{m_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad (3.11)$$

$M(x)$ так же как \overline{X} характеризует центр группирования результатов многократных измерений.

Центральные моменты получают усреднением значений относительно центра распределения, т.е. относительно математического ожидания или среднего арифметического значения, по правилу:

$$\overline{(x - \bar{X})^r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^r p(x) dx \quad (3.12)$$

Второй центральный момент называется дисперсией $D(x)$ и характеризует разброс экспериментальных данных относительно центра распределения.

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p(x) dx \quad (3.13)$$

Для дискретных величин

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 P_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 m_i \quad (3.14)$$

Часто в качестве характеристики разброса результатов измерений используется среднее квадратическое отклонение (СКО)- $\sigma(x)$:

$$\sigma^*(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 m_i}{n}} \quad (3.15)$$

$\sigma^*(x)$ -является смещенной оценкой СКО.

Если из общего числа данных при усреднении исключается одно значение, совпадающее с центром распределения, то такая оценка СКО является несмещенной:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 m_i}{n-1}} \quad (3.16)$$

Если каждый из результатов измерений встречается не более одного раза, то соответственно числовые характеристики определяются по формулам:

- среднее арифметическое значение:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad (3.17)$$

- СКО:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (3.18)$$

Упрощенный расчет дисперсии можно выполнить по свойству дисперсии:

$$D(x)=M(x^2)-M^2(x) \quad (3.19)$$

Третий центральный момент $(x - \bar{X})^3$ используется для характеристики асимметричности кривой распределения плотности вероятности. Асимметрия определяется по формуле:

$$\mu = \frac{(x - \bar{X})^3}{(\sigma^*(x))^3} \quad (3.20)$$

Четвертый центральный момент $(x - \bar{X})^4$ используется для расчета эксцесса, характеризующего заостренность кривой распределения плотности вероятности:

$$v = \frac{(x - \bar{X})^4}{(\sigma^*(x))^4} \quad (3.21)$$

Характеристики с использованием центральных моментов приведены на рисунке 3.4.

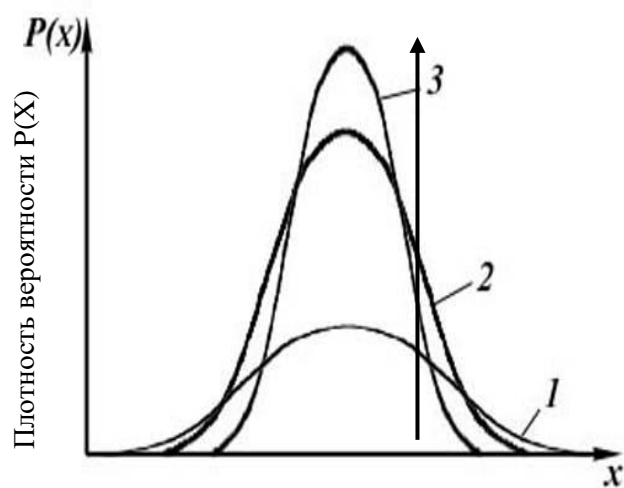
К числовым характеристикам также относятся мода и медиана. Модой M_0 называется наиболее вероятное значение результата измерений. Мода соответствует абсциссе точки максимума кривой распределения плотности вероятности, как показано на рисунке 3.5.

Медиана M_e —это значение результата измерений, относительно которого равновероятно, что результат измерений окажется меньше или больше медианы:

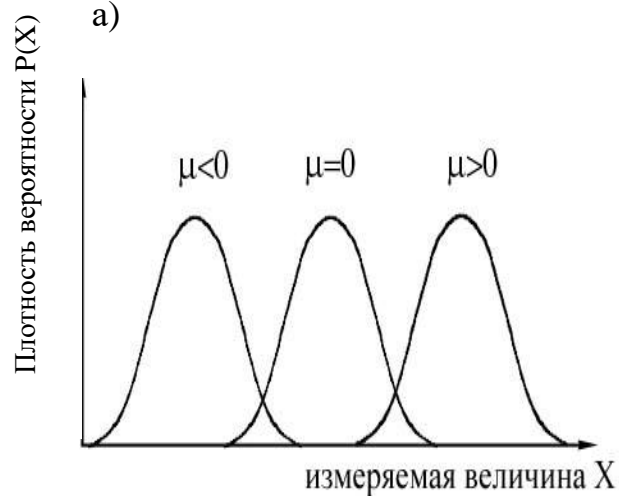
$$P(x < M_e)=P(x > M_e)=0,5 \quad (3.22)$$

На рисунке 3.5 медианой является значение абсциссы перпендикуляра к оси абсцисс, относительно которого площадь под кривой распределения плотности вероятности делится пополам.

Для симметричных распределений все три характеристики — математическое ожидание, мода и медиана — совпадают.



а)



б)

Рисунок 3.4 – Числовые характеристики результатов измерений
а).СКО и эксцесс; б).асимметрия

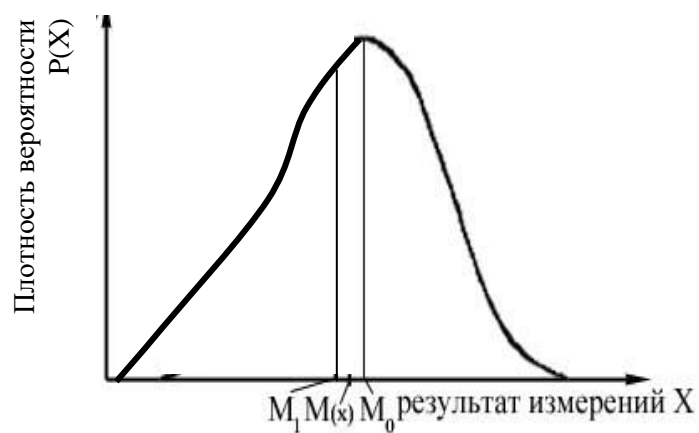


Рисунок 3.5 – Математическое ожидание, мода, медиана

Интервальная характеристика

При повторных измерениях одного и того же размера могут быть получены различные значения. Это объясняется действием случайных

погрешностей. Это действие оценивается вероятностным разбросом результатов многократных измерений в виде доверительного интервала.

Доверительный интервал представляет собой интервал значений, в пределы которого входит измеренный размер с доверительной вероятностью. Доверительный интервал определяется по формуле:

$$\bar{X} - t_p \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq X \leq \bar{X} + t_p \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad (3.23)$$

где n – число измерений;

\bar{X} – среднее арифметическое значение результата измерений;

S – СКО результата измерений:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}} \quad (3.24)$$

t_p – коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности P .

Значение доверительной вероятности задается до начала измерений и обычно равно 0,95. Другие её значения специально оговариваются.

Вопросы для самопроверки

1. Почему результаты измерений рассматриваются как случайные величины?

2. Какая величина является случайной?

3. Что такое массовое событие?

4. Что называется дискретной случайной величиной?

5. Какие случайные величины называются аналоговыми?

6. Какими вероятностными характеристиками можно описать случайную величину?

7. Как определить абсолютную частоту?

8. Что характеризует относительная частота?

9. Как определить функцию распределения вероятностей для случайной величины: а) дискретной; б) аналоговой?

10. Изобразите графически распределения вероятностей, плотности вероятности, функцию накопленных относительных частот и функцию распределения вероятностей.

11. Что определяет функция распределения вероятностей?

12. Как определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал на основании известной а) функции распределения вероятностей; б) плотности распределения вероятностей?

13. Почему для описания случайной величины чаще используются числовые характеристики?

14. Как определяются: а) начальные моменты; б) центральные моменты?

15. Как называется, как определяется и что характеризует первый начальный момент?

16. Какие центральные моменты используются для характеристик случайных величин?

17. Какими характеристиками определяется разброс случайных величин?

18. Определите степень размерности, которую могут иметь: а) дисперсия; б) СКО.

19. Приведите формулы для расчета дисперсии: а) если для каждого результата измерений задана абсолютная частота; б) если значения результатов измерений не повторяются; в) с использованием математического ожидания; г) с использованием вероятностей получения каждого результата.

20. Что характеризует и как определяется асимметрия?

21. Что такое эксцесс, и через какой момент определяется его значение?

22. Что определяют для случайной величины: а) статистическая мода; б) статистическая медиана?

23. Что называется доверительным интервалом?

24. Почему результат многократных измерений представляют в форме доверительного интервала?

25. Что такое доверительная вероятность?

Примеры решения задач

Задача 3.3.1. Произведены измерения выходного напряжения в выборке из партии микросхем. Результаты измерений представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты измерений напряжения

Интервалы значений напряжения U, мВ	210- 212	212- 214	214- 216	216- 218	218- 220	220- 222	222-224
Число значений	5	12	28	75	52	20	8

m_i							
-------	--	--	--	--	--	--	--

Определите характеристики результата измерений выходного напряжения:

- а) вероятностные – в виде гистограммы и функции накопленных частот;
- б) числовые – в виде среднего арифметического значения и СКО;
- в) интервальную – в виде доверительного интервала.

Решение.

а) Число значений в каждом интервале m_i является абсолютной частотой. Рассчитываем относительные частоты для каждого интервала:

$$P_i = \frac{m_i}{n}, \quad (3.25)$$

где n – общее число результатов измерений:

$$n = \sum_{i=1}^r m_i, \quad (3.26)$$

где r – число интервалов, $r = 7$.

$$n = 5 + 12 + 28 + 75 + 52 + 20 + 8 = 200$$

$$P_1 = \frac{5}{200} = 0,025; P_2 = \frac{12}{200} = 0,06; P_3 = \frac{28}{200} = 0,14; P_4 = \frac{75}{200} = 0,375;$$

$$P_5 = \frac{52}{200} = 0,26; P_6 = \frac{20}{200} = 0,1; P_7 = \frac{8}{200} = 0,04.$$

Определяем ширину интервала:

$$h = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{r} \quad (3.27)$$

где U_{\max} и U_{\min} – наибольшее и наименьшее значения напряжения.

$$h = \frac{224 - 210}{7} = 2 \text{ (мВ)}$$

Рассчитываем аналог плотности вероятности:

$$P_i = \frac{m_i}{n \cdot h} = \frac{P_i}{h} \quad (3.28)$$

$$P_1 = \frac{0,025}{2} = 0,0125; P_2 = \frac{0,06}{2} = 0,03; P_3 = \frac{0,14}{2} = 0,07; P_4 = \frac{0,375}{2} = 0,1875;$$

$$P_5 = \frac{0,26}{2} = 0,13; P_6 = \frac{0,1}{2} = 0,05; P_7 = \frac{0,04}{2} = 0,02.$$

Строим гистограмму, отложив по оси ординат величины P_i , как показано на рисунке 3.6, а.

Рассчитываем накопленные относительные частоты F_i для каждого интервала:

$$F_i = \sum_{i=1}^r P_i \quad (3.29)$$

$$F_1 = P_1 = 0,025;$$

$$F_2 = P_1 + P_2 = 0,025 + 0,06 = 0,085;$$

$$F_3 = P_1 + P_2 + P_3 = 0,025 + 0,06 + 0,14 = 0,225;$$

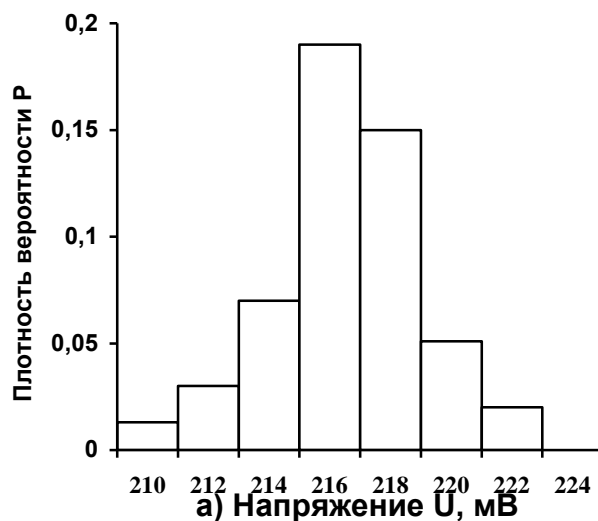
$$F_4 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 = 0,6;$$

$$F_5 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 + 0,26 = 0,86;$$

$$F_6 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 + 0,26 + 0,1 = 0,96;$$

$$F_7 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 0,025 + 0,06 + 0,14 + 0,375 + 0,26 + 0,14 + 0,04 = 1;$$

б) Для расчета числовых характеристик определим середину каждого интервала:



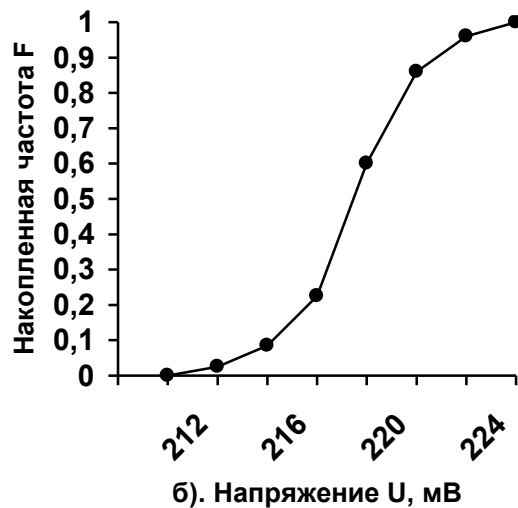
$$x_i = \frac{x_{H_i} + x_{B_i}}{2} \quad (3.30)$$

где x_{H_i} , x_{B_i} – нижняя и верхняя границы i -го интервала.

$x_1 = 211\text{мВ}$; $x_2 = 213\text{мВ}$; $x_3 = 215\text{мВ}$; $x_4 = 217\text{мВ}$; $x_5 = 219\text{мВ}$; $x_6 = 221\text{мВ}$; $x_7 = 223\text{мВ}$.

Рисунок 3.6 – Гистограмма (а) и функция накопленных относительных частот (б)

Среднее арифметическое значение определяем по формуле (3.11):



$$\bar{X} = \frac{1}{200} (211 \cdot 5 + 213 \cdot 12 + 215 \cdot 28 + 217 \cdot 75 + 219 \cdot 52 + 221 \cdot 20 + 223 \cdot 8) = 217,49 \text{ (мВ)}$$

СКО рассчитываем по формуле (3.16). Для небольшого числа данных СКО генеральной совокупности $\sigma(x)$ заменяем на выборочное СКО S .

$$\sigma(x) \approx S = \sqrt{\frac{(211 - 217,49)^2 \cdot 5 + (213 - 217,49)^2 \cdot 12 + (215 - 217,49)^2 \cdot 28 + (217 - 217,49)^2 \cdot 75}{200 - 1} + \frac{(219 - 217,49)^2 \cdot 52 + (221 - 217,49)^2 \cdot 20 + (223 - 217,49)^2 \cdot 8}{200 - 1}} = \sqrt{\frac{1251,98}{199}} = \sqrt{6,291356784} = 2,508257719 \text{ (мВ)}$$

в) Рассчитываем доверительный интервал по формуле (3.23). Так как значение доверительной вероятности не задано, то принимаем $P=0,95$ по приложению А определяем значение коэффициента Стьюдента $t_p=1,96$.

Доверительный интервал:

$$217,49 - 1,96 \cdot \frac{2,508}{\sqrt{200}} \leq X \leq 217,49 + 1,96 \cdot \frac{2,508}{\sqrt{200}}$$

$$217,49 - 0,34759 \leq X \leq 217,49 + 0,34759$$

$$217,14241 \text{ мВ} \leq X \leq 217,83759 \text{ мВ}$$

$$217,14 \text{ мВ} \leq X \leq 217,84 \text{ мВ}$$

Задача 3.3.2. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания P_n при каждом выстреле равна 0,6. На стрельбу отпущено 4 снаряда. Вычислить для числа израсходованных снарядов: математическое ожидание, дисперсию и СКО.

Решение.

Число израсходованных снарядов x может принимать значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. Определим вероятности этих значений.

Вероятность попадания 0,6, тогда вероятность промаха $P_n=1-0,6=0,4$. Если на стрельбу потребовался только 1 снаряд, то значит попали в цель с

1-го раза, т.е. $P_1=0,6$. При необходимости в двух снарядах – первым не попали, а поразили цель вторым. Т.е. для $x_2=2$:

$$P_2=P_n \cdot P_n \quad (3.31)$$

$$P_2=0,6 \cdot 0,4=0,24$$

Для $x_3=3$:

$$P_3=P_n \cdot P_n \cdot P_n=P_n^2 \cdot P_n \quad (3.32)$$

$$P_3=0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6=0,096;$$

Для $x_4=4$ вероятность определяется двумя ситуациями: либо не попали всеми четырьмя снарядами, либо попали последним снарядом:

$$P_4=P_n^4+P_n^3 P_n; \quad (3.33)$$

$$P_4=0,4^4+0,4^3 \cdot 0,6=0,4^3 (0,4+0,6)=0,4^3=0,064.$$

Математическое ожидание:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i \quad (3.33)$$

$$M(x)=1 \cdot 0,6+2 \cdot 0,24+3 \cdot 0,096+4 \cdot 0,064=1,624 \approx 1,6 \text{ (снаряда)}$$

Дисперсия:

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 \cdot P_i \quad (3.34)$$

$$D(x)=(1-1,6)^2 \cdot 0,6+(2-1,6)^2 \cdot 0,24+(3-1,6)^2 \cdot 0,096+(4-1,6)^2 \cdot 0,064=0,8112 \text{ (снаряда}^2\text{)};$$

$$\text{СКО:} \quad \sigma(x)=\sqrt{D(x)} \quad (3.35)$$

$$\sigma(x)=\sqrt{0,8112} = 0,9007 \approx 0,9 \text{ (снаряда)}$$

Задача 3.3.3. Средний процент выпуска брака на предприятии 1,2%. СКО брака $\sigma(x)=0,15\%$. Определите вероятность того, что в отдельные дни процент брака будет находиться в пределах от 0,8% до 1,4%. Предполагается, что величина подчиняется нормальному закону распределения.

Решение.

Соответствие нормальному закону распределения позволяет для определения вероятности измеряемой величины воспользоваться функцией Лапласа (приложение Б).

Определим для каждой границы интервала значение квантили:

$$t_H = \frac{|x_H - \bar{X}|}{\sigma}; \quad t_B = \frac{|x_B - \bar{X}|}{\sigma} \quad (3.36)$$

где x_H – нижняя граница интервала;

x_B – верхняя граница интервала.

$$t_H = \frac{0,8 - 1,2}{0,15} = 2,67; \quad t_B = \frac{1,4 - 1,2}{0,15} = 1,33$$

По приложению Б определяем значения функции Лапласа для найденных значений квантилей:

$$\Phi(t_H) = \Phi(2,67) = 0,4962; \quad \Phi(t_B) = \Phi(1,33) = 0,4082.$$

Рассчитываем вероятность попадания величины в интервал $[t_H; t_B]$:

$$P = \Phi(t_H) + \Phi(t_B) \quad (3,37)$$

$$P = 0,4962 + 0,4082 = 0,9044$$

Задача 3.3.4. Определите минимальный объем выборки n , чтобы с надежностью 0,96 точность оценки математического ожидания измеренного параметра партии с помощью выборочного среднего равна 1,2 мм, если СКО σ равно 0,8 мм.

Решение.

Исходя из формулы (3.23) отклонение от математического ожидания оценивается доверительной погрешностью:

$$\varepsilon = t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.38)$$

$$\text{Тогда} \quad n = \left(\frac{t_p \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad (3.39)$$

$$\sigma = 0,8 \text{ мм}; \quad \varepsilon = 1,2 \text{ мм}.$$

Коэффициент Стьюдента можно определить по приложению Б:

$$\Phi(t_p) = \frac{P}{2} \quad (3.40)$$

$$\Phi(t_p) = \frac{0,96}{2} = 0,48; \quad t_p = 2,055.$$

$$\text{Объем выборки:} \quad n = \left(\frac{2,055 \cdot 0,8}{1,2} \right)^2 = 1,8769 \approx 2 \text{ (шт.)}$$

3.4. Задачи

Задача 3.4.1. Произведены прямые измерения диаметра валов в выборке. Результаты измерений представлены в виде отклонений от номинального значения. Экспериментальные данные распределены по интервалам и представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Результаты измерений

Интервалы отклонений от номинального значения, мкм	-50;-40	-40;-30	-30;-20	-20;-10	-10;0	0;10	10;20	20;30	30;40	40;50
Число экспериментальных данных m_i	3	10	21	35	48	60	39	23	14	6

Постройте гистограмму эмпирического распределения и функцию накопленных относительных частот; определите доверительный интервал для измеренного диаметра в выборке для доверительной вероятности $P=0,98$.

Задача 3.4.2. Измерена выборка объемом $n=100$ из большой партии пакетов фруктового сока. Средний вес пакета оказался равным 1050г. Определить с надежностью 0,95 доверительный интервал для среднего веса пакета сока во всей партии, если СКО веса составляет 20г.

Задача 3.4.3. Результаты многократных измерений напряжения в электрической сети:

$U_i, В \dots$	218	219	220	221	222
$m_i \dots$	5	12	24	15	7

Оцените с надежностью 0,96 математическое ожидание $M(x)$ напряжения, распределенного по нормальному закону, при помощи доверительного интервала.

Задача 3.4.4. Произведено 10 прямых измерений электрической мощности ваттметром. Результаты измерений, кВт: 2,5; 2,2; 2,3; 2,0; 2,4; 2,3; 2,4; 2,1; 2,2; 2,4, подчинены нормальному закону. Найдите оценку для математического ожидания $M(x)$ и постройте доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $P=0,95$.

Задача 3.4.5. Ряд распределения входной величины X измерительного преобразователя имеет вид:

$X_i \dots$	1	2	3	4	5
$P_i \dots$	0,1	0,15	0,5	0,2	0,05

Вычислите математическое ожидание и дисперсию отклика Y измерительного преобразователя, имеющего функцию преобразования вида $Y=1,8+3x$.

Задача 3.4.6. В течение суток регистрирующее устройство контроля каждый час фиксирует температуру в климатической камере. После первичной обработки данных получено распределение температуры по интервалам:

Интервалы, $^{\circ}C$	170-174	174-178	178-182	182-186	186-200
------------------------	---------	---------	---------	---------	---------

Число					
результатов	2	4	9	6	3
измерений m_i					

Определить вероятностные, числовые и интервальную характеристики температуры в камере.

Задача 3.4.7. Измерения потери веса образцов хлебобулочных изделий при определении влажности дали следующие результаты: 12,5; 13,1; 14; 11,7; 15,2; 14,3; 12,8; 12,2; 14,5; 13,6 г. Определите среднюю потерю веса и вероятность того, что результат измерений будет находиться в пределах от 12,4 до 14,4 г.

Задача 3.4.8. При поверке омметра установлено, что 80% погрешностей результатов измерений не превышают $\pm 0,5$ Ом. Полагая распределение погрешностей нормальным, определите вероятность того, что погрешность результата превысит 1 Ом.

Задача 3.4.9. В результате поверки вольтметра установлено, что 70% всех погрешностей показаний прибора не превышает 1 В. Полагая распределение погрешностей нормальным, определите среднюю квадратическую погрешность.

Задача 3.4.10. Многократные измерения частоты частотомером показали, что 60% всех результатов находятся в пределах от 10 до 14 кГц. Оцените точность частотомера и определите предельную погрешность результата из 16 измерений.

Задача 3.4.11. Определите вероятность того, что погрешность среднего результата из 25 измерений при среднеквадратической погрешности 4% не превысит $\pm 1\%$.

Задача 3.4.12. Каким должен быть минимальный объем выборки n , чтобы с надежностью 0,96 точность оценки математического ожидания $M(x)$ измеряемого размера в партии изделий с помощью выборочного среднего равна 0,8 мм, если СКО $\sigma(x)=1$ мм ?

Задача 3.4.13. Сколько раз надо повторить измерения, чтобы была вероятна погрешность, в 2 раза превышающая среднеквадратическую погрешность?

Задача 3.4.14. Сколько повторных измерений надо провести, чтобы была вероятна погрешность, превышающая предельную погрешность $1,5 \sigma$?

Задача 3.4.15. Сколько раз необходимо повторить измерения напряжения, чтобы хотя бы один раз в ряду результатов появилась погрешность, превышающая ± 10 В с вероятностью не менее 0,98, если применяемый метод измерений напряжения обеспечивает СКО результата 5 В.

Задача 3.4.16. Метод измерений емкости с помощью электроизмерительного моста обеспечивает СКО результатов в пределах 0,2 мкФ. Определите:

а) пригоден ли этот метод для однократного измерения емкости 20 мкФ с допускаемой погрешностью $\pm 2\%$ при доверительной вероятности 95%.

б) сколько измерений необходимо провести данным методом, чтобы погрешность среднего результата не превысила $\pm 0,1$ мкФ с доверительной вероятностью 96%.

Задача 3.4.17. Проведены 9 многократных измерений силы тока амперметром, имеющим погрешность $\sigma_1=20$ мА. В результате измеренная сила тока оценена с доверительной погрешностью $\varepsilon=15$ мА. Сколько необходимо провести измерений, чтобы такая же погрешность с такой же вероятностью была получена при использовании другого амперметра с $\sigma_2 = 40$ мА?

Задача 3.4.18. Для результатов измерений толщины диэлектрика постройте гистограмму и определите с вероятностью 0,98 доверительный интервал. Толщина диэлектрика, мм:

10,326	10,052	9,899	9,760	9,856
10,002	10,046	9,464	9,940	9,994
10,010	10,018	9,936	10,006	10,046
9,992	9,872	9,808	10,012	10,006
9,999	9,966	10,080	9,958	10,029
10,004	9,958	10,030	9,990	10,018
9,894	10,028	9,780	9,690	10,008
10,014	10,144	9,970	10,032	9,899
10,030	10,025	10,100	10,014	9,950
9,996	10,000	10,005	10,016	9,946

Задача 3.4.19. Постройте для данных задачи 3.3.18 эмпирическую функцию распределения вероятностей и определите вероятность появления значений толщины диэлектрика, превышающих 10,050 мм.

Задача 3.4.20. Рассчитайте для данных задачи 3.3.18 среднее арифметическое значение, СКО, асимметрию, эксцесс. Определите, в каком интервале находится мода и какому значению равна медиана результатов измерений.

Задача 3.4.21. Из партии изделий контролёр отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что случайно взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,7. Определите вероятность того, что из трёх проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Задача 3.4.22. Измерительное устройство состоит из трёх блоков, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за время T для каждого блока соответственно равны: 0,6; 0,75; 0,89. Найдите вероятности

того, что за время T безотказно будут работать: а) только одни элементы; б) только два элемента; в) все три элемента; г) ни один элемент.

Задача 3.4.23. Вероятности того, что необходимая для селективной сборки деталь находится в первом, втором, третьем, четвёртом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найдите вероятности того, что деталь находится: а) не более, чем в трёх ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

Задача 3.4.24. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле 0,7. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,5, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

Задача 3.4.25. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов каждого элемента соответственно равны 0,15; 0,25; 0,3. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

Задача 3.4.26. Техническое устройство содержит два независимо работающих элемента, вероятности отказа которых соответственно равны 0,065 и 0,078. Найдите вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 3.4.27. Три исследователя, независимо один от другого, измеряют некоторую физическую величину. Вероятности их ошибок при снятии показаний приборов соответственно равны 0,15; 0,20; 0,25. Найдите вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из них допустит ошибку.

Задача 3.4.28. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,4. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый должен сделать по два выстрела. Определите вероятность того, что стрелок попадёт в мишень.

Задача 3.4.29. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при четырёх выстрелах равна 0,7599. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

Задача 3.4.30. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра от номинального размера по абсолютной величине менее 0,7 мм. Определите, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных, если случайная величина распределена нормально с СКО $\delta = 0,4$ мм.

Задача 3.4.31. Результат измерений напряжения, среднее арифметическое значение которого 6,32 В, попадает в интервал от 5,014 до 6,626 В с вероятностью, равной 0,39. Чему равна вероятность попадания результата измерений в интервал от 4,922 до 7,718 В?

Задача 3.4.32. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 с. Какова вероятность отсчета времени с ошибкой более 0,05 с по этому секундомеру, если отсчет выполняется с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону?

Задача 3.4.33. Азимутальный лимб имеет цену деления 1° . Какова вероятность сделать ошибку в пределах $\pm 10'$ при измерении азимутального

угла, если результат отсчета округляется до ближайшего целого числа градусов?

Задача 3.4.34. По результатам измерений 100 резисторов, случайно отобранных из большой партии однотипных изделий, получена оценка сопротивления $\bar{R}=10$ кОм. Найдите:

а) вероятность того, что для резисторов всей партии значения сопротивления находятся в пределах $(10\pm 0,1)$ кОм при СКО $\delta=1$ кОм.

б) количество измерений, при которых с вероятностью 0,95 можно утверждать, что для всей партии резисторов значения сопротивления находятся в пределах $(10\pm 0,1)$ кОм.

Задача 3.4.35. При сборке измерительного устройства для наиболее точной регулировки основного узла может потребоваться (в зависимости от удачи) 1, 2, 3, 4, 5 проб деталей с вероятностями, соответственно равными 0,07; 0,21; 0,55; 0,16; 0,01. Сколько деталей необходимо сборщику для сборки 30 приборов?

Задача 3.4.36. При производстве стальных цилиндрических стержней проверка соответственно наружного диаметра показала, что 5% изделий имеют больший диаметр, чем это допустимо, 91% изделий находится в установленных границах и 4% имеют диаметр меньше допустимого. Какова вероятность обнаружить в выборке из 10 независимо отобранных образцов.

а) ровно один образец с большим диаметром и один с меньшим диаметром, чем это допустимо;

б) все годные образцы;

в) по крайней мере, один образец с диаметром вне установленных границ?

Задача 3.4.37. Из партии, включающей 25 изделий, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом для проверки их качества 3 изделия. Найдите математическое ожидание и СКО нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Задача 3.4.38. Размер шарика для подшипников X . При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на 0.1 мм. Известно, что средний размер диаметра шарика $m_d = \frac{d_1+d_2}{2}$, а брак составляет 10% всего выпуска. Определите СКО $\sigma(x)$ диаметра шарика.

Задача 3.4.39. Возможные значения дискретной случайной величины X :

$x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(X) = 0,1$; $M(X^2) = 0,9$. Найдите вероятности, соответствующие значениям x_1, x_2, x_3 .

Задача 3.4.40. Найдите вероятности возможных значений дискретной случайной величины $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, если известны математические ожидания этой величины и её квадрата: $M(X) = 2,3$; $M(X^2) = 5,9$.

Задача 3.4.41. Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки измерения подчиняются

нормальному закону распределения. Сколько надо провести измерений для определения оценки СКО прибора, чтобы с доверительной вероятностью 70% абсолютная величина ошибки определения этой величина была не более 20% от $\sigma(\bar{X}_n)$?

Задача 3.4.42. В цехе завода выпускаются валы электродвигателей. Из продукции одного станка произвольно выбирают 50 изделий, измеряют их диаметры и вычисляют значение выборочного среднего $\bar{X} = 42,972$ мм. По техническим условиям станок настраивается на номинальный размер 43 мм. Можно ли на основании полученных результатов сделать вывод о том, что станок обеспечивает заданный номинальный размер, или полученные данные свидетельствуют о неудовлетворительной наладке технологического оборудования. Контролируемый признак имеет нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2 = 0,01$ мм².

Практическое занятие 4

Тема: «Классы точности средств измерений»

Цель занятия: Получить навыки в оценке и использовании классов точности средств измерений.

Задачи: 1) изучить правила определения и назначения классов точности;

2) освоить применение классов точности при выборе средств измерений;

3) научиться определять пригодность средств измерений для проведения измерений и контроля.

Основные положения

Класс точности средств измерений – это обобщённая характеристика данного типа средств измерений, как правило, отражающая уровень их точности, выражаемая пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими характеристиками, влияющими на точность.

Класс точности может быть представлен в форме:

– абсолютной погрешности, если в данной области измерений принято выражать погрешность в единицах измеряемой величины или в делениях шкалы. Например, для мер массы или длины;

– относительной погрешности, если погрешности нельзя полагать постоянными в пределах диапазона измерений;


– приведённой погрешности, если границы погрешностей можно полагать практически неизменными в пределах диапазона измерений.

Если класс точности представлен в виде абсолютной погрешности с практически неизменными границами вида:

$$\Delta_n = \pm a, \quad (4.1)$$

где $a = \text{const}$,

то он обозначается заглавными буквами латинского алфавита или римскими цифрами. При этом должна быть приведена таблица соответствия обозначения значению погрешности. Чем больше цифра или дальше от начала алфавита буква, тем большее значение погрешности они обозначают.

Класс точности обозначается числом в кружке, например , если он установлен по относительной погрешности с постоянными границами:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{x_n} = \pm q, \% , \quad (4.2)$$

где x_n – измеряемая величина;

* $q = \text{const}$.

Класс точности обозначается двумя числами через косую черту, например 0,03/0,02, если он установлен по относительной погрешности, определённой по линейно изменяющейся абсолютной погрешности. Абсолютная погрешность имеет вид:

$$\Delta_n = \pm (a + bx_n), \quad (4.3)$$

где a, b – постоянные коэффициенты.

Тогда относительная погрешность:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{x_n} = \pm \frac{a + bx_n}{x_n} = \pm \left(b + \frac{a}{x_n} \right) = \pm \left[\left(b + \frac{a}{|X_k|} \right) - \frac{a}{|X_k|} + \frac{a}{x_n} \right] = \pm \left[\left(b + \frac{a}{|X_k|} \right) + \frac{a}{|X_k|} \left(\frac{|X_k|}{x_n} - 1 \right) \right] = \pm \left[c + d \left(\frac{|X_k|}{x_n} - 1 \right) \right], \quad (4.4)$$

где *c = b + d;

$$*d = \frac{a}{|X_k|};$$

X_k – больший (по модулю) из пределов измерений.

Класс точности обозначается числом без символов, если определён по приведённой погрешности:

$$\gamma = \frac{\Delta_n}{X_N} = \pm p, \%, \quad (4.5)$$

где X_N – нормирующее значение шкалы средства измерений;

*p = const.

*С целью ограничения номенклатуры средств измерений по точности число устанавливаемых классов точности для конкретных групп средств измерений ограничивается, а расчётные величины q, c, d, p округляются до значения, ближайшего большего по ряду:

$1 \cdot 10^n; 1,5 \cdot 10^n; (1,6 \cdot 10^n); 2 \cdot 10^n; 2,5 \cdot 10^n; (3 \cdot 10^n); 4 \cdot 10^n; 5 \cdot 10^n; 6 \cdot 10^n,$

где $n=1; 0; -1; -2$ и т.д.

За нормирующее значение чаще всего принимают диапазон измерений. Если средство измерений предназначено для контроля отклонения величины от номинального значения, то это значение принимают в качестве X_N .

1,5

Класс точности обозначается с символом ∇ , например ∇ , если шкала средства измерений нелинейная (гиперболическая, логарифмическая и т.д.), и за нормирующее значение X_N принимается длина шкалы.

Вопросы для самопроверки

1. Что определяет класс точности средства измерений?
2. При каких условиях класс точности определяется по погрешности: а) абсолютной; б) относительной; в) приведенной?
3. Как обозначается класс точности, установленный по погрешности: а) абсолютной; б) относительной; в) приведенной?
4. Как устанавливается числовое значение класса точности?
5. Как устанавливается и обозначается класс точности при линейно изменяющейся абсолютной погрешности?

Примеры решения задач

Задача 4.3.1. Измерена термо-ЭДС потенциометром класса точности 0,5 со шкалой от 200 до 600 °С. Указатель стоит на отметке 400 °С.

Определите наибольшую относительную погрешность измерения, если измерение проведено при нормальных условиях.

Решение.

Судя по обозначению, класс точности определён по приведённой погрешности для линейной шкалы, т.е. по формуле (6.5):

$$\gamma = \frac{\Delta_n}{X_N} \cdot 100\%,$$

где $X_N = 600 - 200 = 400$ °C.

$$\text{Тогда} \quad \Delta_n = \frac{\gamma \cdot X_N}{100\%} \quad (4.6)$$

Относительная погрешность:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{x_n} \cdot 100\% = \frac{\gamma \cdot X_N}{100\% \cdot x_n} \cdot 100\% = \frac{\gamma \cdot X_N}{x_n} \quad (4.7)$$
$$\delta_n = \frac{0,5 \cdot 400}{400} = 0,5\%$$

Задача 4.3.2. Измерения мощности электробытового устройства проводилось методом амперметра–вольтметра. Оба прибора имели класс точности 0,5, работали в нормальных условиях и имели шкалы соответственно (0–10) А и (100–400) В. Измеренные значения силы тока 9 А и напряжение 222 В. Определите погрешность измерения мощности.

Решение.

Так как мощность измерялась косвенно на основании зависимости $P=I \cdot U$, то погрешность ее измерения складывается из погрешностей неоднородных величин – силы тока и напряжения. Для их суммирования погрешности должны быть представлены в относительной форме. Относительная погрешность измерения мощности:

$$\delta_P = \sqrt{\delta_I^2 + \delta_U^2}, \quad (4.8)$$

где δ_I и δ_U – относительные погрешности измерения силы тока и напряжения.

Эти погрешности можно определить по формуле (6.7):

– при измерении силы тока:

$$\delta_I = \frac{0,5 \cdot 10}{222} \approx 0,56\%;$$

– при измерении напряжения:

$$\delta_U = \frac{0,5 \cdot 300}{222} \approx 0,68\%.$$

Определяем погрешность измерения мощности:

$$\delta_P = \sqrt{0,56^2 + 0,68^2} = \sqrt{0,776} \approx 0,88\%.$$

Задача 4.3.3. В результате поверки амперметра в контролируемых точках шкалы: 1–2–3–4–5 А получены следующие показания:

– при увеличении силы тока 1,1–2,3–2,9–3,8–4,7 А;

– при уменьшении силы тока 4,7–3,9–2,8–2,1–1,2 А.

Определите абсолютную, относительную, приведённую погрешности, вариацию показаний и класс точности амперметра.

Решение.

Определяем абсолютные погрешности показаний в контролируемых точках шкалы амперметра по формуле (5.1): $+0,1 \text{ А} - +0,3 \text{ А} - -0,1 \text{ А} - -0,2 \text{ А} -$

$-0,3 \text{ А} - -0,1 \text{ А} - -0,2 \text{ А} - +0,1 \text{ А} - +0,2 \text{ А}.$

Выбираем наибольшее (по модулю) значение погрешности. Абсолютная погрешность амперметра $\Delta_n = 0,3 \text{ А}.$

Относительная погрешность по формуле (6.2):

$$10\% - 15\% - 3\% - 5\% - 6\% - 2,5\% - 6,7\% - 5\% - 20\%.$$

Наибольшее значение относительной погрешности показаний:

$$\delta_n = 20\%.$$

Приведённая погрешность по формуле (6.5):

$$\gamma = \frac{0,3}{5} \cdot 100\% = 6\%.$$

По стандартному ряду значению приведённой погрешности соответствует 6-й класс точности. Но на электроизмерительные приборы такой грубый класс не назначается.

Задача 4.3.4. Для измерения напряжения применяются два вольтметра: $X_{N_1} = 50 \text{ В}$, класс точности $K_1 = 2,5$; $X_{N_2} = 150 \text{ В}$, класс точности $K_2 = 1,0$.

Определите, какой вольтметр точнее, если первый показал $40,2 \text{ В}$, а второй 42 В .

Решение.

Для конкретного измеренного значения сравниваем относительные погрешности вольтметров, рассчитанные по формуле (6.7):

$$\delta_1 = \frac{2,5 \cdot 50}{40,2} = 3,1\%; \delta_2 = \frac{1,0 \cdot 150}{42} = 3,57\%.$$

Так как $\delta_2 > \delta_1$, то первый вольтметр точнее.

Задачи

Задача 4.4.1. При калибровке технического термометра со шкалой ($0 - 300$) $^{\circ}\text{С}$ был использован лабораторный термометр, имеющий поправку по свидетельству о поверке $-1,5^{\circ}\text{С}$. Поправка на выступающий столбик $+0,5^{\circ}\text{С}$. Измерения температуры в термостатике дали следующие результаты: техническим термометром 249°С ; лабораторным термометром 253°С .

Определите, выходит ли за пределы допускаемой основной погрешности $\pm 2\%$ действительное значение погрешности показаний технического термометра. Какой класс точности можно присвоить техническому термометру по его действительной погрешности?

Задача 4.4.2. Показания омметра на поддиапазоне от 0 до 10^3 Ом составили $152,8 \text{ Ом}$. Действительное значение сопротивления 150 Ом . Определите абсолютную, относительную погрешности и класс точности прибора по приведённой погрешности.

Задача 4.4.3. По результатам поверки вольтметра методом непосредственного сравнения с эталонным вольтметром определите наибольшую относительную погрешность, вариацию показаний и класс точности по приведённой погрешности.

Таблица 4.1 – Результаты поверки вольтметра

Контролируемые точки поверяемого прибора, В		2	4	6	8	10
Показания эталонного вольтметра, В	“ход вверх”	2,03	3,97	6,1	8,2	9,9
	“ход вниз”	1,98	4,01	6,05	8,03	9,95

Задача 4.4.4 Определите относительную погрешность измерения напряжения, если показание вольтметра класса точности 1,5 с пределом измерения 400 В составило 129 В.

Задача 4.4.5. Три амперметра включены в электрическую цепь силой тока 20 А. Первый амперметр имеет пределы измерений (0–25) А и класс точности 2,5; второй амперметр – с пределами измерений (5–40) А и классом точности 2; третий амперметр – с пределами измерений (10–50) А и классом точности 1,5. Определите, какой из приборов обеспечит большую точность измерения силы тока в цепи.

Задача 4.4.6. Оцените погрешность измерений мощности, если сопротивление измерено с погрешностью 1%, а показания вольтметра класса точности 1,5 составили $\frac{2}{3}$ длины шкалы.

Задача 4.4.7. Вольтметр на напряжение (0–130) В подключён к трансформатору напряжения 1000/100. Определите напряжение электрической сети, если вольтметр показал 90 В и оцените погрешность измерения напряжения, если класс точности прибора 2, а трансформатора 1,5.

Задача 4.4.8. При определении затрат энергии в электрической печи за сутки были измерены: напряжение в электрической сети 222 В вольтметром классом точности 1,5 со шкалой (0–300) В, сила тока 110 А амперметром со шкалой (0–150) А класса точности 1,0, время часами, имеющими погрешность 1,5%. Определите значение энергии, абсолютную и относительную погрешности её измерения.

Задача 4.4.9. При поверке дистанционного парогазового термометра класса точности 2 с пределами измерений от 0 до 160 °С были получены показания эталонного ртутного термометра в контролируемых точках шкалы (таблица 6.2). Определите годность прибора.

Таблица 4.2 – Результаты поверки термометра

Контролируемые точки шкалы, °С.	0	20	40	60	80	100	120	140	160
Показания эталона при повышении температуры, °С	0,1	22	40	63	78	96	123	141	159
Показания эталона при понижении температуры, °С	0,2	21	42	60	79	98	122	140	158

Задача 4.4.10. Определите класс точности амперметра по относительной погрешности, если он в цепи с эталонным сопротивлением 5 Ом показал ток 5 А, а при замене прибора эталонным амперметром для получения тех же показаний пришлось уменьшить напряжение на 1 В.

Задача 4.4.11. Определите погрешность измерения сопротивления цепи методом амперметра и вольтметра, если амперметр имеет диапазон измерений (0–50) мА и класс точности 2, а вольтметр – диапазон измерений (0–30) В и класс точности 1,5. Показания приборов соответственно равны 40 мА и 12 В.

Задача 4.4.12. Определите диапазон измерений ваттметра 4-го класса точности, имеющего наибольшую абсолютную погрешность 40 Вт.

Задача 4.4.13. Определите класс точности по приведённой погрешности манометра с диапазоном измерений 600 кПа, если при измерении давления 1 атм получена относительная погрешность 3,8 %.

Задача 4.4.14. Выберите средства измерений для косвенного определения электрической энергии, метрологические характеристики которых приведены в таблице 6.3, чтобы погрешность измерений энергий не превышала 5 % при показаниях приборов 0,6 А; 25 В; 10 мин. Большой запас точности не рекомендуется.

Таблица 4.3 – Метрологические характеристики средств измерений

Наименование Мет рологи- ческие ха- рактеристики	Амперметры			Вольтметры			Секундомеры		
	A1	A2	A3	V1	V2	V3	T1	T2	T3
1.Пределы измерений	0-1000 мА	0-10 А	0-20 А	5-40 В	0-30 В	10-50 В	0-30 мин.	0-60 мин.	0-120 мин.
2.Класс точно-сти по приве-дённой погреш-ности	1	0,5	0,3	2	4	0,4	1	1	0,5

Задача 4.4.15. Определите класс точности миллиамперметра с конечным значением шкалы 0,5 мА для измерения тока в диапазоне $0,1 \div 0,5$ мА так, чтобы относительная погрешность измерения не превышала 2,5%.

Задача 4.4.16. Определите, в каком случае абсолютная погрешность измерения тока $I=20$ мА меньше, если для измерения использованы два прибора, имеющие соответственно шкалы на 30 мА (класс точности 0,5) и 100 мА (класс точности 0,2).

Задача 4.4.17. Определите возможные пределы показаний двух миллиамперметров с пределами измерений (0-100) мА классом точности 1,0 и 0,5 при измерении тока, действительное значение которого 50 мА.

Задача 4.4.18. Определите класс точности амперметра с пределом измерений 10 А, поверенного с помощью компенсатора постоянного тока, если поверка дала результаты, указанные в таблице 6.4.

Таблица 4.4 – Результаты поверки

Значения поверяемых точек	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
------------------------------	-----	-----	-----	-----	-----

шкалы, А					
Значения токов, измеренные компенсатором, А	0,2048	0,3976	0,6010	0,8051	0,9979

Задача 4.4.19. Определите абсолютную ΔU и относительную δ_u погрешность измерения напряжения в цепи (рисунок 6.1), если показания вольтметров с пределами измерений (0-150) В, класса точности 2 составили $U_1 = 80$ В, $U_2 = 45$ В.

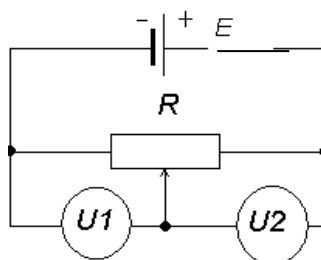


Рисунок 4.1 – Схема измерительной цепи

Задача 4.4.20. Рассчитайте межповерочный интервал для термопары класса точности 4 и пределами измерений (100-500) °С, если её погрешность полностью определяется прогрессирующей погрешностью $K_n = 22 \cdot 10^{-3}$ °С/сут.

Задача 4.4.21. Определите класс точности электроиндуктивной измерительной системы по относительной погрешности, если пределы показаний $(-100 \div 300)$ мкм, измеренное значение 120 мкм, а абсолютная погрешность Δ изменяется по зависимости $\Delta = 2,05 + 0,008 \cdot x$, где x – измеряемое отклонение от настроенного размера.

Задача 4.4.22. Класс точности тензометрического моста 0,009/0,004, предел измерения 500 мкм. Определите относительную и абсолютную погрешности измерения деформации 50 мкм.

Задача 4.4.23. Определите класс точности по наибольшей приведённой погрешности лазерного измерителя скорости с пределами измерений (20-250) км/ч и абсолютной погрешностью, имеющей вид $\Delta = 5 - 0,006 \cdot x$.

Задача 4.4.24. Определите, по какому значению измеряемой величины был установлен класс точности расходомера жидкостей, равный 0,02/0,03, если предел измерений расхода 150 л/ч, и относительная погрешность составила 5%.

Задача 4.4.25. Определите класс точности СИ по относительной погрешности, если известно, что абсолютная погрешность имеет линейную зависимость от измеряемой величины, и при поверке получены результаты, представленные в таблице 6.5.

Таблица 4.5 – Результаты поверки СИ

Значение поверяемой точки шкалы СИ x , мкм	10	20	30	40	50	60	70	80
Погрешность показаний СИ Δ , мкм	0,4	0,5	0,8	1	1,1	1,3	1,5	2

Задача 4.4.26. Для средств измерений массы принято выражать погрешность в абсолютной форме. В результате поверки ошибочно весам присвоили классы точности по приведённой погрешности (таблица 6.6). Исправьте эту ошибку и приведите таблицу соответствия буквенного обозначения значению погрешности.

Таблица 4.6 – Классы точности поверенных весов

Обозначение СИ	B1	B2	B3	B4	B5	B6
Пределы измерений СИ, г	0-500	0-1000	0-2000	0-5000	0-10000	500-10000
Классы точности по приведённой погрешности	0,2	0,5	0,4	0,2	0,6	1

Задача 4.4.27. Измерительная система имеет аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности. Определите класс точности по относительной погрешности, если аддитивная составляющая равна 2 мкм, мультипликативная – 0,001, наибольший предел измерений – 200 мм.

Задача 4.4.28. Определите класс точности амперметра с током полного отклонения $I_A = 5$ мА и внутренним сопротивлением $R_A = 5$ Ом, после введения шунта сопротивлением $R_{ш} = 15$ мОм, если до введения шунта его приведённая погрешность γ была 5 %. Погрешностью шунта можно пренебречь.

Задача 4.4.29. Определите класс точности амперметра с током полного отклонения $I_A = 50$ мА и внутренним сопротивлением $R_A = 10$ Ом после введения шунта сопротивлением $R_{ш} = 101$ мОм и абсолютной погрешностью $\Delta_{ш} =$

5 мОм, учитывая, что наибольшая погрешность амперметра наблюдается в конце шкалы. До введения шунта абсолютная погрешность амперметра $\gamma = 4$ %.

Задача 4.4.30. Определите класс точности по относительной погрешности амперметра с током полного отклонения $I_A = 200$ мА и внутренним сопротивлением $R_A = 10$ Ом после введения шунта сопротивлением $R_{ш} = 0,2$ Ом, если собственная погрешность амперметра изменяется по закону $\Delta = 4-0,2 \cdot x$, где x – измеряемое значение силы тока.